Lajur Open 2023

Simulasi OSN-K Matematika SMA Online 2023

Kelas Lajur Matematika

1 Kemampuan Dasar

Terdiri dari 10 soal isian singkat. Jawablah setiap soal berikut dengan menulis jawaban akhirnya saja. Setiap soal yang dijawab benar bernilai +2 poin. Tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab (kosong).

1. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(f(x)) = 3x - 9$ untuk setiap bilangan real x. Jumlah semua bilangan real x yang memenuhi $f(x) = x$ dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ di mana a dan b adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $a + b$ adalah . . . .

   <u>Jawaban: 11</u>

   Perhatikan bahwa jika $f(x) = x$, maka

   $$3x - 9 = f(f(x)) = f(x) = x \iff 3x - 9 = x \iff x = \frac{9}{2}.$$

   Jadi, jumlah semua bilangan real x yang memenuhi adalah $\frac{9}{2}$. Maka $a = 9$ dan $b = 2$ sehingga diperoleh $a + b = \boxed{11}$.

2. Banyak bilangan asli n di mana $n \leq 2023$ sedemikian sehingga

   $$\frac{3^n - 1}{2}$$

   merupakan bilangan genap adalah . . . .

   <u>Jawaban: 1011</u>

   Misalkan $\frac{3^n-1}{2} = 2k$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif k dan kita punya $3^n - 1 = 4k$. Kita punya $3^n - 1 \equiv 0 \pmod 4 \iff (-1)^n \equiv 1 \pmod 4$. Hal ini terjadi jika dan hanya jika n bilangan genap. Maka $n = 2, 4, 6, \cdots, 2022$ sehingga ada $\boxed{1011}$ kemungkinan.

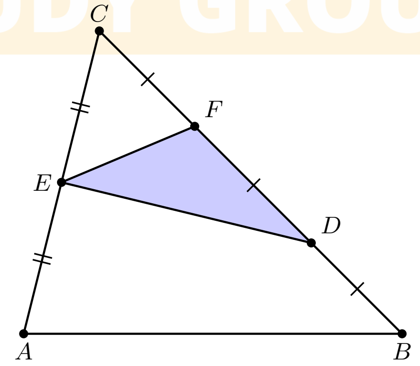
3. Di dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah, 6 bola hijau, dan 7 bola kuning. Banyak cara mengambil tiga bola sekaligus sedemikian sehingga terdapat tepat dua bola yang berwarna sama adalah . . . .

   <u>Jawaban: 541</u>

   Jika dua bola merah yang terambil, maka ada $\binom{5}{2}\binom{6+7}{1} = 130$ cara. Jika dua bola hijau yang terambil, maka ada $\binom{6}{2}\binom{5+7}{1} = 180$ cara. Jika dua bola kuning yang terambil, maka ada $\binom{7}{2}\binom{5+6}{1} = 231$ cara. Jadi, total ada $130 + 180 + 231 = \boxed{541}$.

4. Titik D dan F terletak pada sisi BC dari segitiga ABC sehingga titik F terletak di antara C dan D, sedangkan titik E terletak pada sisi AC. Diketahui bahwa panjang $CF = FD = DB$ dan $EC = EA$. Jika luas segitiga DEF adalah 100, luas dari segitiga ABC adalah . . . .

   <u>Jawaban: 600</u>



Perhatikan bahwa

$$\frac{[CEF]}{[DEF]} = \frac{CF}{FD} = 1 \implies [CEF] = [DEF] = 100 \implies [CEF] = 100.$$

Tinjau juga

$$\frac{[ABC]}{[CEF]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CB \cdot CA \cdot \sin C}{\frac{1}{2} \cdot CF \cdot CE \cdot \sin C} = \frac{CB}{CF} \cdot \frac{CA}{CE} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} = 6.$$

Maka $[ABC] = 6[CEF] = \boxed{600}$.

5. Dalam satu set kartu yang berisi 5 kartu di mana setiap kartu bernomor $1, 2, 3, 4$, dan 5. Wildan akan mengambil dua kartu dari set tersebut satu per satu tanpa pengembalian. Peluang bahwa nomor kartu pertama yang Wildan dapatkan lebih kecil dari nomor kartu kedua dapat dinyatakan sebagai $\frac{x}{y}$ di mana x dan y adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $x + y$ adalah . . . .

   Jawaban: 3

   Apabila kartu pertama yang terambil adalah 1, kemungkinan kartu kedua yang terambil adalah 2,3,4, atau 5. Maka peluangnya $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{20}$. Apabila kartu kedua yang terambil adalah 2, kemungkinan kartu kedua yang terambil adalah 3, 4, atau 5. Maka peluangnya adalah $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$, dan seterusnya. Jadi, total peluang yang diminta adalah $\frac{4}{20} + \frac{3}{20} + \frac{2}{20} + \frac{1}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ sehingga $x = 1$ dan $y = 2$. Maka $x + y = \boxed{3}$.

   Komentar. Apabila terdapat n kartu, peluang bahwa nomor kartu pertama yang didapatkan lebih kecil dari kartu kedua tetap $\frac{1}{2}$. Misalkan k_1 sebagai nomor kartu pertama dan k_2 sebagai nomor kartu kedua. Perhatikan bahwa peluang bahwa terjadinya $k_1 < k_2$ dan $k_1 > k_2$ sama (kondisi simetris) serta tidak mungkin terjadi $k_1 = k_2$. Maka

   $$1 = P(k_1 > k_2) + P(k_1 = k_2) + P(k_1 < k_2) = 2P(k_1 < k_2) \iff P(k_1 < k_2) = \frac{1}{2}.$$

6. Diberikan polinomial $\mathcal{P}(x)$ tak konstan di mana semua koefisiennya berupa bilangan bulat. Apabila untuk setiap bilangan bulat $a \neq 2023$ berlaku $(a - 2023)$ membagi $\mathcal{P}(a)$, nilai dari $\mathcal{P}(2023)$ adalah . . . .

   Jawaban: 0

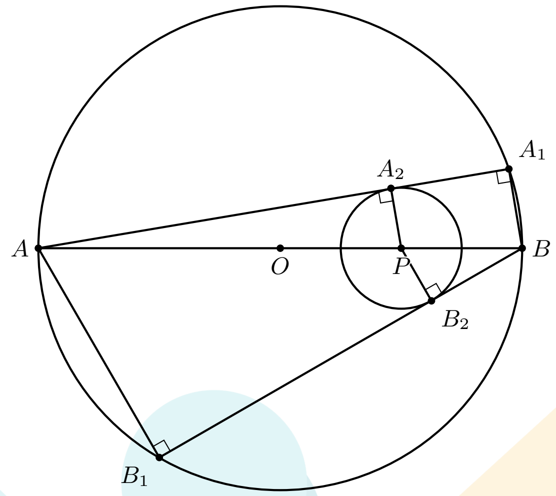
   Kita gunakan fakta bahwa berlaku $x - y \mid \mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(y)$ untuk setiap dua bilangan bulat x dan y yang berbeda. Perhatikan bahwa $a - 2023 \mid \mathcal{P}(a) - \mathcal{P}(2023)$ dan karena $a - 2023 \mid \mathcal{P}(a)$ maka $a - 2023 \mid \mathcal{P}(2023)$ untuk setiap bilangan bulat $a \neq 2023$. Bilangan bulat satu-satunya yang habis dibagi sebarang bilangan bulat tak nol adalah 0, jadi $\mathcal{P}(2023) = \boxed{0}$.

7. Lingkaran ω_1 berpusat di O dan berdiameter AB. Titik P berada di segmen OB yang berbeda dengan O. Lingkaran ω_2 dengan pusat P di mana ω_2 berada di dalam ω_1. Garis singgung ω_2 dari titik A dan B berturut-turut memotong ω_1 sekali lagi di titik A_1 dan B_1 sedemikian sehingga A_1 dan B_1 berada pada sisi yang berlawanan terhadap AB. Jika panjang $A_1B = 5$, $AB_1 = 15$, dan $OP = 10$, panjang jari-jari dari lingkaran ω_1 adalah . . . .

   Jawaban: 20

   Misalkan AA_1 dan BB_1 berturut-turut menyinggung ω_2 di titik A_2 dan B_2. Karena AB diameter, kita punya $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90°$. Di sisi lain, kita punya juga $\angle AA_2P = \angle BB_2P = 90°$. Karena $\angle PB_2B = \angle AB_1B$ dan $\angle PBB_2 = \angle ABB_1$, maka $\triangle PBB_2 \sim \triangle ABB_1$ (hubungan sudut-sudut). Dengan cara sama, kita punya $\triangle PAA_2 \sim \triangle BAA_1$. Misalkan R panjang jari-jari lingkaran ω_1 dan r panjang jari-jari lingkaran ω_2. Karena $\triangle OAA_2 \sim \triangle BAA_1$, maka

   $$\frac{PA_2}{A_1B} = \frac{AP}{AB} \iff \frac{r}{5} = \frac{R + 10}{2R} \iff r = \frac{5R + 50}{2R}. \quad (1)$$



Karena $\triangle PBB_2 \sim \triangle ABB_1$, maka

$$\frac{BP}{BA} = \frac{PB_2}{AB_1} \iff \frac{R-10}{2R} = \frac{r}{15} \iff r = \frac{15R-150}{2R}. \tag{2}$$

Karena (1) = (2), maka $\frac{5R+50}{2R} = \frac{15R-150}{2R} \iff 5R+50 = 15R-150 \iff 200 = 10R \iff R = \boxed{20}$.

8. Misalkan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ menyatakan semua solusi terurut (x, y) yang memenuhi sistem persamaan

$$x^2 - xy + y^2 = 10$$
$$x - xy + y = 4.$$

Nilai dari $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n)$ adalah . . . .

Jawaban: 6

Misalkan $x + y = a$ dan $xy = b$ sehingga diperoleh $a - b = 4 \iff b = a - 4$. Di sisi lain,

$$10 = x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy = a^2 - 3b = a^2 - 3(a-4) = a^2 - 3a + 12$$

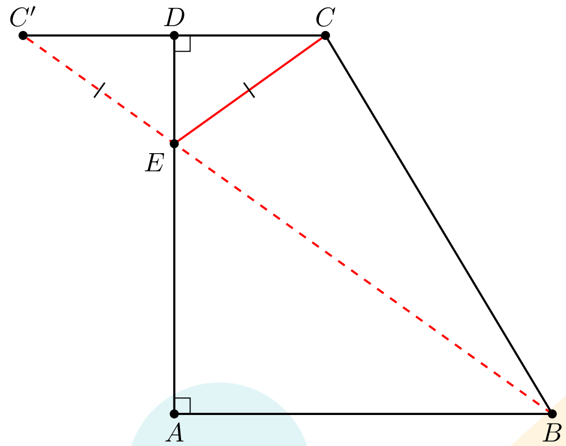
dan didapatkan $0 = a^2 - 3a + 2 = (a-2)(a-1)$. Didapatkan $(a, b) = (2, -2), (1, -3)$. Perhatikan juga bahwa (x, y) solusi jika dan hanya jika (y, x) juga merupakan solusi. Karena masing-masing pasangan $(a, b) = (2, -2), (1, -3)$ memberikan solusi (x, y) yang berbeda, maka nilai yang diminta adalah

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2 + 2 + 1 + 1 = \boxed{6}.$$

9. Diberikan trapesium siku-siku $ABCD$ di mana $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$. Diketahui bahwa panjang $AB = 5, CD = 2$, dan $AD = 12$ serta titik E terletak pada segmen AD. Agar $BE + EC$ bernilai minimum, panjang AE dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ di mana a dan b adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $a + b$ adalah . . . .

Jawaban: 67

Cerminkan titik C terhadap D menghasilkan bayangan C', maka panjang $EC' = EC$. Kita punya $BE + EC = BE + EC'$ harus bernilai minimum. Perhatikan bahwa $BE + EC'$ bernilai minimum jika dan hanya jika B, E, dan C' segaris. Karena $CC' \parallel AB$, maka $\angle ABC' = \angle CC'B$. Karena $\angle ABE = \angle DC'E$ dan $\angle BAE = \angle C'DE$, maka $\triangle ABE \sim \triangle DC'E$. Sehingga kita peroleh $\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{DC'} = \frac{5}{2}$. Karena $AE + ED = AD = 12$, maka $AE = \frac{5}{5+2} \cdot 12 = \frac{60}{7}$ sehingga $a = 60$ dan $b = 7$. Maka $a + b = \boxed{67}$.



Komentar. Kondisi nilai minimum $BE+EC'$ dapat ditinjau dari ketaksamaan segitiga. Jika B, E, C' tidak segaris akan terbentuk segitiga BEC' dan berlaku ketaksamaan segitiga $BE + EC' > BC'$. Jika segaris, maka $BE + EC' = BC'$ yang memastikan kondisi ini menyebabkan $BE + EC'$ bernilai minimum.

10. Bilangan bulat (a, b) di mana $a, b \leq 100$ memenuhi

$$\left\lfloor \frac{2a+3b}{2+3} \right\rfloor = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}.$$

Nilai terbesar dari $a + b$ adalah . . . .

Catatan. Untuk setiap bilangan riil x, definisikan $\lfloor x \rfloor$menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, dan $\lfloor -4,42 \rfloor = -5$.

Jawaban: 139

Perhatikan bahwa

$$\left\lfloor \frac{2a+3b}{5} \right\rfloor = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{3a+2b}{6}$$

sehingga $\frac{3a+2b}{6}$ harus bilangan bulat. Perhatikan bahwa $2 \mid 6 \mid 3a + 2b \implies 2 \mid 3a + 2b$. Karena $2 \mid 2b$, maka $2 \mid 3a$. Karena $\text{fpb}(2, 3) = 1$, maka $2 \mid a$. Dengan cara sama, diperoleh $3 \mid 6 \mid 3a + 2b$ dan akan didapatkan $3 \mid b$. Misalkan $a = 2t$ dan $b = 3l$ untuk suatu bilangan bulat t dan l. Maka

$$\left\lfloor \frac{4t+9l}{5} \right\rfloor = t + l \iff t + l \leq \frac{4t+9l}{5} < t + l + 1 \iff 5t + 5l \leq 4t + 9l < 5t + 5l + 5.$$

Maka $t \leq 4l$ dan $4l < t+5$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $t \leq 4l < t+5$. Jadi, $4l \in \{t, t+1, t+2, t+3, t+4\}$.

- Jika $4l = t$ maka $a = 8l$. Dapat dicek bahwa $\left\lfloor \frac{2a+3b}{5} \right\rfloor = \lfloor 5l \rfloor = 5l$ dan $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 5l$ sehingga memenuhi untuk sebarang bilangan bulat l. Kita punya $(a, b) = (8l, 3l)$ sehingga nilai maksimum $a + b$ tercapai jika $(a, b) = (96, 36) \implies a + b = 132$.
- Jika $4l = t+1$, maka $a = 8l-2$. Dapat dicek bahwa $\left\lfloor \frac{2a+3b}{5} \right\rfloor = \left\lfloor 5l - \frac{4}{5} \right\rfloor = 5l-1$ dan $\frac{a}{2}+\frac{b}{3} = 4l-1+l = 5l-1$ yang berarti memenuhi untuk sebarang bilangan bulat l. Kita punya $(a, b) = (8l-2, 3l)$ sehingga nilai maksimum $a + b$ tercapai jika $(a, b) = (94, 36) \implies a + b = 130$.
- Jika $4l = t+2$, maka $a = 8l-4$. Dapat dicek bahwa $\left\lfloor \frac{2a+3b}{5} \right\rfloor = \left\lfloor 5l - 1 - \frac{3}{5} \right\rfloor = 5l-2$ dan $\frac{a}{2}+\frac{b}{3} = 5l-2$ yang berarti memenuhi untuk sebarang bilangan bulat l. Kita punya $(a, b) = (8l - 4, 3l)$ sehingga nilai maksimum $a + b$ tercapai jika $(a, b) = (100, 39) \implies a + b = 139$.
- Jika $4l = t+3$, maka $a = 8l-6$. Dapat dicek bahwa $\left\lfloor \frac{2a+3b}{5} \right\rfloor = \left\lfloor 5l - 2 - \frac{2}{5} \right\rfloor = 5l-3$ dan $\frac{a}{2}+\frac{b}{3} = 5l-3$ yang berarti memenuhi untuk sebarang bilangan bulat l. Kita punya $(a, b) = (8l - 6, 3l)$ sehingga nilai maksimum $a + b$ tercapai jika $(a, b) = (98, 39) \implies a + b = 137$.

- Jika $4l = t+4$, maka $a = 8l-8$. Dapat dicek bahwa $\left\lfloor \frac{2a+3b}{5} \right\rfloor = \left\lfloor 5l - 3 - \frac{1}{5} \right\rfloor = 5l-4$ dan $\frac{a}{2}+\frac{b}{3} = 5l-4$ yang berarti memenuhi untuk sebarang bilangan bulat l. Kita punya $(a, b) = (8l - 8, 3l)$ sehingga nilai maksimum $a + b$ tercapai jika $(a, b) = (96, 39) \implies a + b = 135$.

Jadi, nilai maksimum dari $a + b$ adalah $\boxed{139}$.

2 Kemampuan Lanjut

Terdiri dari 10 soal isian singkat. Jawablah setiap soal berikut dengan menulis jawaban akhirnya saja. Setiap soal yang dijawab benar bernilai +4 poin, bernilai -1 poin apabila dijawab salah, dan bernilai 0 apabila tidak dijawab (kosong).

11. Diberikan x dan y adalah dua bilangan riil di mana $x, y > 1$ dan memenuhi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. Nilai minimum dari
$$\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{3(y-1)^3}$$
dapat dinyatakan sebagai $\frac{p}{q}$ di mana p dan q adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $p+q$ adalah . . . .

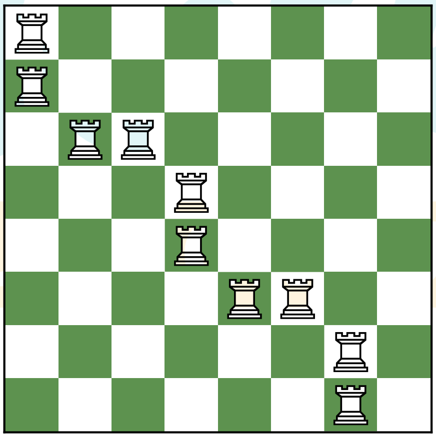
Jawaban: 11

Perhatikan bahwa $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \iff x + y = xy \iff 1 = (x-1)(y-1)$. Misalkan $x - 1 = a$ dan $y - 1 = b$, maka $a, b > 0$ dan $ab = 1$. Menurut $AM \geq GM$, maka
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3b^3} &= \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{6b^3} + \frac{1}{6b^3} \\
&\geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{6a^2} \cdot \frac{1}{6a^2} \cdot \frac{1}{6a^2} \cdot \frac{1}{6b^3} \cdot \frac{1}{6b^3}} \\
&= 5\sqrt[5]{\frac{1}{6^5(ab)^6}} \\
&= \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$
Jadi, nilai minimumnya adalah $\frac{5}{6}$ di mana kesamaan terjadi jika dan hanya jika $(a, b) = (1, 1) \iff (x, y) = (2, 2)$. Kita punya $p = 5$ dan $q = 6$ sehingga $p + q = \boxed{11}$.

12. Sebanyak n bidak benteng diletakkan pada papan 8×8. Dua buah benteng dikatakan *saling menyerang* apabila kedua benteng tersebut berada di satu baris atau satu kolom yang sama. Nilai n terbesar yang mungkin sedemikian sehingga setiap benteng saling menyerang tepat satu benteng lainnya adalah . . . .

Jawaban: 10

Untuk $n = 10$ dapat terpenuhi dengan konfigurasi berikut.



Akan dibuktikan bahwa untuk $n \geq 11$ tidak memungkinkan. Perhatikan bahwa suatu baris atau kolom bisa memuat 0, 1, atau 2 benteng. Misalkan $(b_1, b_2, \cdots, b_8)$ menyatakan banyak benteng pada baris ke-1, baris ke-2, dan seterusnya hingga baris ke-8. Jika kita letakkan 11 benteng pada papan tersebut, kemungkinan komposisi benteng tiap baris adalah $(2,2,2,2,2,1,0,0)$, $(2,2,2,2,1,1,1,0)$, $(2,2,2,1,1,1,1,1)$, dan permutasinya. Baris yang memuat 2 benteng berakibat ada kolom yang memuat 1 benteng. Sedangkan, baris yang memuat 1 benteng berakibat ada sebuah kolom yang memuat 2 benteng. Pada komposisi $(2,2,2,2,2,1,0,0)$ berarti ada setidaknya $2 \cdot 5 + 1 = 11$ kolom, kontradiksi. Begitu juga untuk $(2,2,2,2,1,1,1,0)$ dan $(2,2,2,1,1,1,1,1)$ berturut-turut mengharuskan setidaknya $2 \cdot 4 + 1 + 1 = 10$ kolom dan $2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 = 9$ kolom. Kontradiksi dengan maksimal kolom ada 8. Andaikan untuk $n > 12$ bisa, buang beberapa benteng hingga tersisa 11 benteng dan kondisi ini harusnya masih memungkinkan, namun kontradiksi karena kondisi setelah dibuang tidak memungkinkan. Jadi, $n = \boxed{10}$ adalah nilai n terbesar yang mungkin.

13. Yasya dan Wildan bermain menggunakan sebuah dadu yang seimbang. Pemenang permainan pada setiap babak adalah pemain yang pertama kali mendapatkan mata dadu 6. Pemain yang kalah mendapatkan giliran pertama pada babak selanjutnya. Wildan mendapatkan giliran pertama pada babak pertama. Peluang bahwa Wildan mendapatkan giliran pertama pada babak keempat dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ di mana a dan b adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $a + b$ adalah . . . .

Jawaban: 1996

Tinjau kondisi apabila seorang pemain mendapatkan giliran pertama dalam suatu babak. Peluang dia mendapatkan mata dadu 6 pada giliran pertama adalah $\frac{1}{6}$, peluang dia mendapatkan mata dadu 6 pada giliran ketiga adalah $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$, peluang mendapatkan mata dadu 6 pada giliran kelima adalah $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6}$, dan seterusnya. Sehingga total peluang pemain pertama memenangkan permainan adalah

$$\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5\frac{1}{6} + \cdots = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{36}} = \frac{6}{11}.$$

Sehingga peluang pemain kedua memenangkan babak tersebut adalah $1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$. Karena Wildan harus mendapatkan giliran pertama pada babak keempat, maka babak ketiga harus dimenangkan oleh Yasya. Kemungkinan urutan pemain yang memenangkan pertama hingga ketiga adalah WWY, WYY, YWY, dan YYY. Untuk WWY, artinya babak pertama dimenangkan oleh Wildan (sebagai pemain pertama), kemudian dimenangkan lagi oleh Wildan (sebagai pemain kedua), kemudian dimenangkan oleh Yasya (sebagai pemain pertama). Maka peluangnya adalah $\frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11}$. Dengan penjelasan yang sama untuk WYY, YWY, dan YYY, total peluangnya adalah

$$\frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} + \frac{6}{11} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{6}{11} + \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} = \frac{665}{1331}.$$

Maka $a = 665$ dan $b = 1331$ sehingga diperoleh $a + b = \boxed{1996}$.

14. Diberikan segitiga siku-siku ABC di mana $\angle A = 90°$. Garis sumbu $\overline{BC}$ memotong segmen $\overline{AC}$ di titik D dan garis sumbu $\overline{BD}$ memotong segmen $\overline{AB}$ di titik E. Apabila garis CE membagi besar $\angle ACB$ menjadi dua bagian sama besar, besar dari $\angle ABC$ dalam satuan derajat adalah . . . .

Jawaban: 54

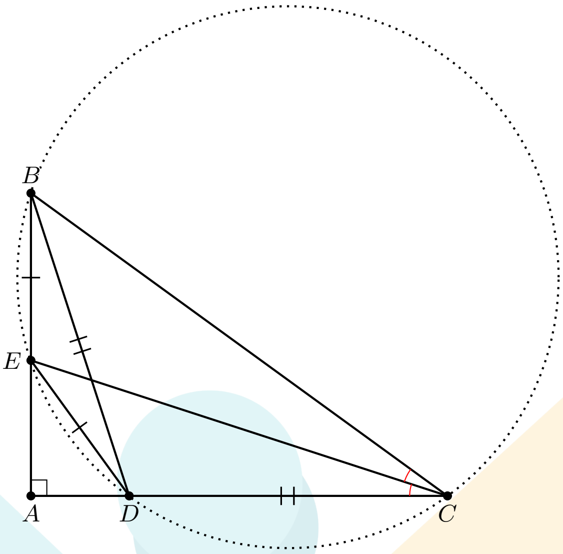
Karena E berada di garis sumbu $\overline{BD}$, maka panjang $ED = EB$. Dengan alasan yang sama, maka panjang $DC = DB$. Misalkan $\angle DCE = \angle BCE = \alpha$.

Lemma. *C, D, E, B terletak pada lingkaran yang sama.*

Proof. Misalkan lingkaran luar segitiga CDB memotong CE di titik E' di mana $C \neq E'$. Maka

$$\angle BDE' = \angle BCE' = \angle DCE' = \angle DBE' \iff \angle BDE' = \angle DBE'$$

sehingga panjang $E'B = E'D$. Karena C, E, E' segaris, panjang $E'B = E'D$, panjang $EB = ED$, dan panjang $CD \neq CB$, maka haruslah $E = E'$. Artinya, C, D, E, B siklis seperti yang ingin dibuktikan. □



Dari segitiga DCB, maka $\angle DBC = \angle DCB = 2\alpha$. Dari segitiga ABC, maka $\angle ABC = 90^\circ - 2\alpha$ sehingga $\angle EBD = 90^\circ - 4\alpha$. Karena panjang $EB = ED$, maka $\angle EDB = \angle EBD = 90^\circ - 4\alpha$ dan diperoleh $\angle DEB = 8\alpha$. Karena $CDEB$ segiempat tali busur, maka $180^\circ = \angle DEB + \angle DCB = 8\alpha + 2\alpha = 10\alpha$ sehingga $\alpha = 18^\circ$. Jadi, $\angle ABC = 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - 36^\circ = \boxed{54^\circ}$.

Komentar. Lemma di atas dapat dituliskan kembali sebagai berikut: Diberikan segitiga ABC di mana panjang $CA \neq CB$. Titik D terletak pada garis bagi $\angle C$ sedemikian sehingga panjang $DA = DB$. Maka A, C, B, D terletak pada satu lingkaran.

Alternatif Penyelesaian (Kenji Gunawan). Misalkan $\angle ACB = 2x$ dan diperoleh $\angle DBC = \angle DCB = 2x$. Karena $\angle ABC = 90^\circ - 2x$, maka $\angle ABD = 90^\circ - 4x$. Kemudian, diperoleh $\angle AED = 180^\circ - \angle BED = \angle BDE + \angle DBE = 2\angle DBE = 180^\circ - 8x$. Dari Teorema Garis Bagi, berlaku $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC} = \cos(2x)$ dan $\frac{AE}{EB} = \frac{AE}{DE} = \cos(180^\circ - 8x)$. Diperoleh $\cos(2x) = \cos(180^\circ - 8x) \iff 2x = 180^\circ - 8x + 360^\circ k \iff x = 18^\circ + 36^\circ k$ atau $2x = -(180^\circ - 8x) + 360^\circ k \iff x = 30^\circ - 60^\circ k$ untuk suatu bilangan bulat k. Karena $180^\circ - 8x > 0 \iff x < 22.5^\circ$, jadi $x = 18^\circ$. Diperoleh $\angle ABC = 90^\circ - 2x = \boxed{54^\circ}$.

15. Banyak bilangan bulat yang dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{a}{b} + \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$$

untuk suatu bilangan bulat a dan b yang tak nol adalah . . . .

Jawaban: 2

Misalkan $\text{fpb}(a, b) = d$, maka $a = dx$ dan $b = dy$ di mana x dan y adalah dua bilangan bulat tak nol di mana $\text{fpb}(x, y) = 1$. Maka

$$P = \frac{a}{b} + \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = \frac{dx}{dy} + \frac{d^2x^2 + 2d^2xy + d^2y^2}{d^2x^2 + d^2y^2} = \frac{x}{y} + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x}{y} + \frac{2xy}{x^2+y^2} + 1.$$

Sekarang, kita harus punya $\frac{x}{y} + \frac{2xy}{x^2+y^2}$ bilangan bulat. Perhatikan bahwa

$$\frac{x}{y} + \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{x^3 + xy^2 + 2xy^2}{x^2y + y^3}.$$

Maka $x^2y + y^3 \mid x^3 + xy^2 + 2xy^2$. Karena $y \mid x^2y + y^3$, maka

$$y \mid x^2y + y^3 \mid x^3 + xy^2 + 2xy^2 \implies y \mid x^3 + xy^2 + 2xy^2.$$

Karena $y \mid xy^2$ dan $y \mid 2xy^2$, maka $y \mid x^3$. Karena $\text{fpb}(x, y) = 1 \implies \text{fpb}\left(x^3, y\right) = 1$, kita punya $y \mid 1$. Jadi, $y = 1$ atau $y = -1$. Untuk $y = 1$, sekarang kita harus punya $x^2 + 1 \mid x^3 + x + 2x$. Perhatikan bahwa $x^3 + x = x\left(x^2 + 1\right)$ sehingga $x^2 + 1 \mid x^3 + x$ sehingga sekarang kita punya $x^2 + 1 \mid 2x$. Jelas $x \neq 0$, akibatnya $\left|x^2 + 1\right| \leq |2x|$ sehingga untuk $x > 0$

$$x^2 + 1 \leq 2x \iff 0 \geq x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \iff 0 \geq (x-1)^2 \iff x = 1.$$

Sedangkan, untuk $x < 0$ berakibat

$$x^2 + 1 \leq -2x \iff 0 \geq x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \iff 0 \geq (x+1)^2 \iff x = -1.$$

Jadi, didapatkan $(a, b) = (dx, dy) = (\pm d, d)$ dan diperoleh $P \in \{-1, 3\}$. Jika $y = -1$, didapatkan $-x^2 - 1 \mid x^3 + x - 2x$ yang ekivalen dengan $x^2 + 1 \mid x^3 - x$ yang berakibat $x^2 + 1 \mid x^3 - x - \left(x^3 + x\right) = -2x$ yang ekivalen degan $x^2 + 1 \mid 2x$. Dengan cara sama, didapatkan $x = 1$ atau $x = -1$ sehingga $(a, b) = (dx, dy) = (\pm d, -d)$. Didapatkan $P \in \{-1, 3\}$.

Jadi, banyak bilangan bulat yang dimaksud adalah $\boxed{2}$.

16. Diberikan polinomial $\mathcal{P}(x)$ dengan koefisien bilangan riil dan untuk setiap bilangan riil x memenuhi

$$\mathcal{P}(x-1) + \mathcal{P}(x+1) + 6 = 2x + 2\mathcal{P}(x).$$

Misalkan $S = \mathcal{P}(9) + \mathcal{P}(3) - \mathcal{P}(12) - \mathcal{P}(0)$. Dari semua polinomial $\mathcal{P}(x)$ yang mungkin, nilai terbesar dari $|S|$ adalah . . . .

<u>Jawaban: 162</u>

Misalkan $\mathcal{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ di mana $a_0, a_1, \cdots, a_n$ bilangan riil dan $a_n \neq 0$. Perhatikan bahwa

$$3x = \mathcal{P}(x-1) + \mathcal{P}(x+1) - 2\mathcal{P}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i(x-1)^i + a_i(x+1)^i - 2a_i x^i\right).$$

Untuk $\mathcal{P}(x) = c$ untuk suatu konstan jelas tidak terpenuhi. Apabila $\mathcal{P}(x) = ax + b$ menyebabkan $\mathcal{P}(x-1) + \mathcal{P}(x+1) - 2\mathcal{P}(x) = 0$ sehingga juga tidak terpenuhi. Akan ditentukan kasus untuk $n \geq 2$ dan misalkan $Q(x) = \mathcal{P}(x-1) + \mathcal{P}(x+1) - 2\mathcal{P}(x)$.

- Akan kita tinjau koefisien x^n. Koefisien x^n diperoleh dari penjabaran $(x+1)^n, (x-1)^n$, dan x^n sehingga koefisien x^n dari $Q(x)$ adalah

$$\underbrace{a_n\binom{n}{0}(-1)^0}_{\text{dari } (x-1)^n} + \underbrace{a_n\binom{n}{0}1^0}_{\text{dari } (x+1)^n} - \underbrace{2a_n}_{\text{dari } x^n} = a_n + a_n - 2a_n = 0.$$

- Akan kita tinjau koefisien x^{n-1}. Koefisien x^{n-1} diperoleh dari penjabaran $(x+1)^n, (x+1)^{n-1}, (x-1)^n, (x-1)^{n-1}$, dan x^{n-1} sehingga koefisien x^{n-1} dari $Q(x)$ adalah

$$\begin{aligned}
&\underbrace{a_n\binom{n}{1}(-1)^1}_{\text{dari } (x-1)^n} + \underbrace{a_n\binom{n}{1}1^1}_{\text{dari } (x+1)^n} + \underbrace{a_{n-1}\binom{n-1}{0}(-1)^0}_{\text{dari } (x-1)^{n-1}} + \underbrace{a_{n-1}\binom{n-1}{0}1^0}_{\text{dari } (x+1)^{n-1}} - \underbrace{2a_{n-1}}_{\text{dari } x^{n-1}}\\
&= -na_n + na_n + a_{n-1} + a_{n-1} - 2a_{n-1}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Akan kita tinjau koefisien x^{n-2}. Koefisien x^{n-2} diperoleh dari penjabaran $(x+1)^i, (x-1)^i$ untuk setiap $i = n-2, n-1, n$ dan x^{n-2} sehingga koefisien x^{n-2} dari $Q(x)$ adalah

$$\begin{aligned}
&\underbrace{a_n\binom{n}{2}(-1)^2}_{\text{dari } (x-1)^n} + \underbrace{a_n\binom{n}{2}1^2}_{\text{dari } x^{n-2}} + \underbrace{a_{n-1}\binom{n-1}{1}(-1)^1}_{\text{dari } (x-1)^{n-1}} + \underbrace{a_{n-1}\binom{n-1}{1}1^1}_{\text{dari } (x+1)^{n-1}} + \underbrace{a_{n-2}\binom{n-2}{0}(-1)^0}_{\text{dari}(x-1)^{n-2}} \\
&\quad + \underbrace{a_{n-2}\binom{n-2}{0}1^0}_{\text{dari } (x+1)^{n-2}} - \underbrace{2a_{n-2}}_{\text{dari } x^{n-2}} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}a_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n - (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-2} - 2a_{n-2} \\
&= n(n-1)a_n \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Jadi, $\deg Q(x) = n-2$. Karena $Q(x) = 2x-6$, maka $n-2 = \deg Q(x) = \deg(2x-6) = 1$ sehingga $n = 3$. Misalkan $\mathcal{P}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Kita punya

$$Q(x) = \mathcal{P}(x-1) + \mathcal{P}(x+1) - 2\mathcal{P}(x) = 6ax + 2b.$$

Maka $6ax+2b = 2x-6$ untuk setiap x riil sehingga haruslah $6a = 2 \iff a = \frac{1}{3}$ dan $2b = -6 \iff b = -3$. Jadi, $\mathcal{P}(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + cx + d$ dan

$$\begin{aligned}
S &= \left(\frac{9^3}{3} - 3\cdot 9^2 + 9c + d\right) + \left(\frac{3^3}{3} - 3\cdot 3^2 + 3c + d\right) - \left(\frac{12^3}{3} - 3\cdot 12^2 + 12c + d\right) - d \\
&= 243 - 243 + 9c + d + 9 - 27 + 3c + d - 576 + 432 - 12c - d - d \\
&= -162.
\end{aligned}$$

yang artinya hanya ada satu nilai S saja. Jadi, $|S| = \boxed{162}$.

17. Banyak pasangan himpunan (S_1, S_2, S_3) sedemikian sehingga

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subseteq \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$$

adalah X. Sisa pembagian X jika dibagi 100 adalah . . . .

<u>Jawaban: 502</u>

Banyak kemungkinan pasangan himpunan (S_1, S_2, S_3) di mana $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ adalah 4^{10} karena setiap anggota dari $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ memiliki 4 kemungkinan: anggota himpunan S_1, S_2, S_3, atau tidak ketiganya. Akan kita gunakan prinsip inklusi eksklusi. Misalkan A dan B berturut-turut adalah himpunan semua pasangan (S_1, S_2, S_3) sedemikian sehingga $S_1 = S_2$ dan $S_2 = S_3$. Maka banyak pasangan (S_1, S_2, S_3) sedemikian sehingga terdapat himpunan yang sama diantara S_1, S_2, S_3 adalah $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

- Untuk $|A|$, yaitu apabila $S_1 = S_2$. Maka banyak kemungkinannya adalah $|A| = 3^{10}$ karena setiap anggota dapat menjadi anggota S_1, S_3, atau tidak keduanya. Dengan cara yang sama, diperoleh $|B| = 3^{10}$.
- Untuk $|A \cap B|$, yaitu apabila $S_1 = S_2 = S_3$. Maka banyak kemungkinannya adalah $|A \cap B| = 2^{10}$ karena masing-masing anggota dapat menjadi anggota dari S_1 atau tidak.

Jadi, $|A \cup B| = 3^{10} + 3^{10} - 2^{10} = 2 \cdot 3^{10} - 2^{10}$. Sehingga banyak pasangan himpunan (S_1, S_2, S_3) adalah $X = 4^{10} - |A \cup B| = 4^{10} - 2\cdot 3^{10} + 2^{10}$. Tinjau bahwa $4^5 = 1024 \equiv 24 \pmod{1000}$, $3^7 = 2187 \equiv 187 \pmod{1000}$, dan $2^{10} = 1024 \equiv 24 \pmod{1000}$. Maka

$$4^{10} \equiv 24^2 \equiv 576 \pmod{1000}, \quad 3^{10} \equiv 3^7 \cdot 3^3 \equiv 187 \cdot 27 \equiv 5049 \equiv 49 \pmod{1000}.$$

Jadi, $X \equiv 576 - 2\cdot 49 + 24 \equiv 502 \pmod{1000}$ sehingga tiga digit terakhir dari X adalah $\boxed{502}$.

18. Banyak bilangan riil positif a yang memenuhi

$$2a^3 - a + \frac{1}{8} = 2a\left(2a^2 - 1\right)^3$$

adalah . . . .

Jawaban: 3

Tinjau $2a^3 - a = a\left(2a^2 - 1\right)$ sehingga

$$\frac{1}{8} = 2a\left(2a^2 - 1\right)^3 - a\left(2a^2 - 1\right) = a\left(2a^2 - 1\right)\left(2\left(2a^2 - 1\right)^2 - 1\right).$$

Akan dibuktikan bahwa $0 < a < 1$. Andaikan $a \geq 1$, maka $2a^2 - 1 \geq 1$ dan $2\left(2a^2 - 1\right)^2 - 1 \geq 1$. Sehingga berlaku $a\left(2a^2 - 1\right)\left(2\left(2a^2 - 1\right)^2 - 1\right) \geq 1$, kontradiksi. Jadi, haruslah $0 \leq a < 1$. Sehingga terdapat suatu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ yang memenuhi $a = \cos(x)$. Kita punya $2a^2 - 1 = 2\cos^2(x) - 1 = \cos(2x)$ dan $2\left(2a^2 - 1\right)^2 - 1 = 2\cos^2(2x) - 1 = \cos(4x)$. Kita peroleh $\frac{1}{8} = \cos(x)\cos(2x)\cos(4x)$. Kalikan kedua ruas dengan $8\sin(x)$, maka

$$\sin(x) = 8\sin(x)\cos(x)\cos(2x)\cos(4x) = 4\sin(2x)\cos(2x)\cos(4x) = 2\sin(4x)\cos(4x) = \sin(8x).$$

Kita punya $8x = x + 2\pi k$ atau $8x = \pi - x + 2\pi k$ sehingga $x = \frac{2k}{7}\pi$ atau $x = \frac{2k+1}{9}\pi$ untuk suatu bilangan bulat k. Karena $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, untuk $x = \frac{2k}{7}\pi$ kita punya $0 < \frac{2k}{7}\pi \leq \frac{\pi}{2} \iff 0 < k \leq \frac{7}{4}$ sehingga $k = 1$ yang berarti ada 1 solusi. Untuk $x = \frac{2k+1}{9}\pi$ maka $0 < \frac{2k+1}{9}\pi \leq \frac{\pi}{2}$ sehingga $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{7}{4}$ yang berarti ada 2 solusi, yaitu $k = 0, 1$. Jadi, kita punya $a \in \left\{\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{\pi}{9}, \frac{1}{2}\right\}$. Jadi, ada $\boxed{3}$ solusi.

19. Untuk setiap bilangan asli n, definisikan:

- $\sigma(n)$ menyatakan jumlah semua faktor positif dari n. Sebagai contoh, $\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$ dan $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$.
- $\varphi(n)$ menyatakan banyak bilangan asli yang tidak lebih dari n dan relatif prima dengan n. Sebagai contoh, $\varphi(5) = 4$ dan $\varphi(9) = 6$.

Jumlah semua bilangan genap positif k sedemikian sehingga $k^4\sigma(k) - 2$ habis dibagi $\varphi(k)$ adalah . . . .

Jawaban: 12

Tinjau jika k memiliki faktor prima ganjil p sedemikian sehingga $p^2 \mid k$. Perhatikan bahwa $\varphi\left(p^2\right) = p^2\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p(p-1) \implies p \mid \varphi\left(p^2\right)$. Tuliskan $k = p^t x$ di mana $t \geq 2$ dan $\text{fpb}(p, x) = 1$ dan karena φ bersifat multiplikatif maka $\varphi(k) = \varphi\left(p^t x\right) = \varphi\left(p^t\right)\varphi(x) = p^{t-1}(p-1)\varphi(x) \implies \varphi\left(p^2\right) \mid \varphi(k)$. Kita punya $p \mid \varphi\left(p^2\right) \mid \varphi(k) \implies p \mid \varphi(k)$. Maka $p \mid \varphi(k) \mid k^4\sigma(k) - 2 \implies p \mid k^4\sigma(k) - 2 \implies p \mid 2$, kontradiksi. Jika k tidak berbentuk 2^t untuk suatu bilangan asli t, misal $k = 2^m p_1 p_2 \cdots p_t$ di mana $p_1, p_2, \cdots, p_t$ prima ganjil yang berbeda. Maka

$$\varphi(k) = 2^m p_1 p_2 \cdots p_t \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_t}\right) = 2^{m-1}\prod_{i=1}^{t}(p_i - 1).$$

Notasikan $\nu_2(n) = m$ sebagai $2^m \mid n$ dan $2^{m+1} \nmid n$ di mana m bilangan asli. Perhatikan bahwa $\nu_2\left(p_i - 1\right) \geq 1$, jika $m \geq 2$ maka

$$\nu_2\left(\varphi(k)\right) = (m-1) + \sum_{i=1}^{t}\nu_2\left(p_i - 1\right) \geq (m-1) + t \geq 1 + 1 = 2.$$

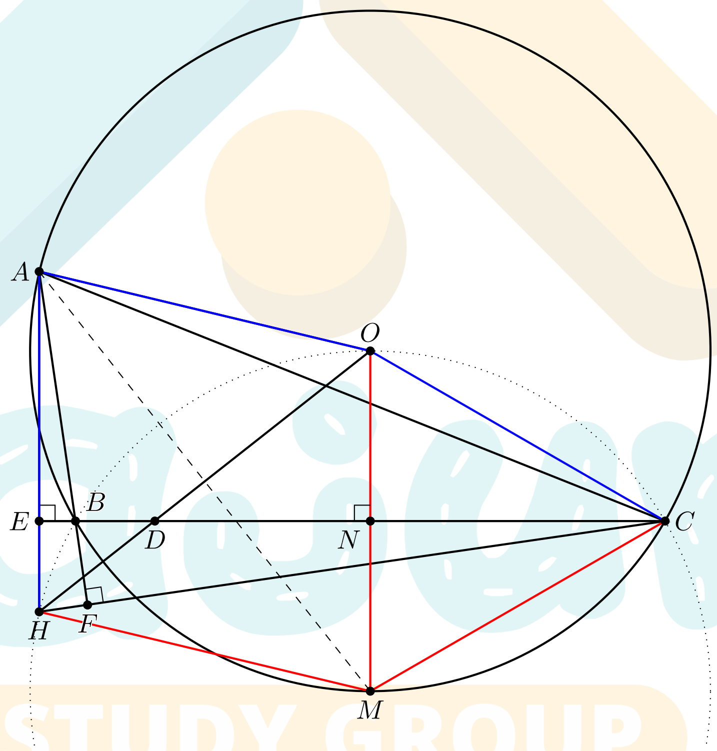
Maka $2^2 \mid \varphi(k) \implies 4 \mid \varphi(k)$. Kita punya $4 \mid \varphi(k) \mid k^4\sigma(k) - 2 \implies 4 \mid k^4\sigma(k) - 2$. Karena $4 \mid k^4$, maka $4 \mid -2$ yang mana kontradiksi. Jadi, $m = 1$ sehingga $n = 2p_1p_2\cdots p_t$. Jika $t \geq 2$, maka $\nu_2\left(\varphi(k)\right) = \sum_{i=1}^{t}\nu_2(p_i - 1) = t \geq 2$ dan terjadi kontradiksi seperti kondisi sebelumnya. Jadi, $n = 2p$ untuk suatu bilangan prima ganjil p. Diperoleh $\sigma(2p) = 1 + 2 + p + 2p = 3p + 3$ dan $\varphi(2p) = \varphi(2)\varphi(p) = p - 1$. Maka $16p^4(3p + 3) - 2 = 48p^4(p + 1) - 2$ harus habis dibagi $p - 1$. Tinjau

$$0 \equiv 48p^4(p + 1) - 2 \equiv 48 \cdot 1^4 \cdot (2) - 2 \equiv 94 \pmod{p - 1}.$$

Maka $p - 1 \mid 94$ dan diperoleh $p - 1 \in \{1, 2, 47, 94\}$. Kita punya $p = 3$ sehingga $k = 2p = 6$. Cek, $\varphi(6) = 2$ dan $6^4 \cdot \sigma(6) - 2$ yang mana jelas memenuhi. Jika $k = 2^m$, maka $\varphi(k) = 2^{m-1}$ dan $\sigma(2^m) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^m = 2^{m+1} - 1$. Kita punya $2^{m-1} \mid 2^{4m}\left(2^{m+1} - 1\right) - 2 = 2^{5m} - 2^{4m} - 2$. Jika $m \geq 3$, maka $4 \mid 2^{m-1}$ sehingga $4 \mid 2^{m-1} \mid 2^{5m} - 2^{4m} - 2$ dan karena $4 \mid 2^{5m}, 2^{4m}$ maka $4 \mid 2$, kontradiksi. Jadi, $m = 1 \implies k = 2$ dan $m = 2 \implies k = 4$. Jika $k = 2$ kita punya $\varphi(2) = 1$ yang mana ini jelas memenuhi. Jika $k = 4$ kita punya $\varphi(4) = 2$ yang mana juga memenuhi mengingat $2^{5m} - 2^{4m} - 2$ selalu genap sehingga pasti habis dibagi 2. Jadi, $n \in \{2, 4, 6\}$ yang mana jumlahnya adalah $2 + 4 + 6 = \boxed{12}$.

20. Diberikan segitiga ABC dengan panjang ABC di mana panjang $AB < AC$. Lingkaran luar segitiga ABC berpusat di O dan memiliki panjang jari-jari 1. Titik H merupakan perpotongan ketiga garis tinggi segitiga ABC dan garis OH memotong garis BC di titik D. Titik M merupakan perpotongan garis bagi $\angle BAC$ dengan lingkaran luar segitiga ABC dan panjang $MH = MC = 1$. Apabila $\cos(\angle BCA - \angle ABC) = \frac{11}{32}$, maka panjang DO dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ di mana a, b, dan c bilangan asli, fpb$(a, b) = 1$ dan c tidak habis dibagi bilangan kuadrat apapun selain 1. Nilai dari $a + b + c$ adalah . . . .

<u>**Jawaban: 46**</u>



Misalkan N adalah titik tengah $\overline{BC}$. Karena $ABMC$ segiempat tali busur, maka

$$\angle MBC = \angle MAC = \angle BAM = \angle BCM \iff \angle MBC = \angle MCB$$

sehingga panjang $MB = MC$. Maka M titik tengah busur BC sehingga O, N, M segaris. Karena panjang $MO = 1 = MB = MC = MH$, maka titik-titik H, B, O, dan C terletak pada satu lingkaran dengan pusat M. Misalkan AH, BH, dan CH berturut-turut memotong garis BC, AC, dan AB di titik E, F, dan G. Tinjau $\angle BOC = 2\angle CAB$. Jika H terletak di dalam segitiga (dengan kata lain ABC segitiga lancip), maka

$$\angle BHC = \angle FHG = 360^\circ - \angle HFA - \angle HGA - \angle FAG = 180^\circ - \angle FAG = 180^\circ - \angle BAC.$$

Jika H terletak di luar segitiga ABC (dengan kata lain ABC segitiga tumpul), maka

$$\angle CHB = \angle FHB = 90^\circ - \angle HBF = 90^\circ - \angle GBA = \angle GAB = \angle CAB.$$

Mengingat H, B, O, C terletak pada lingkaran yang sama, jika ABC segitiga lancip berlaku $\angle BHC = \angle BOC$ dan jika segitiga ABC tumpul berlaku $\angle BOC + \angle BAC = 180^\circ$. Keduanya menyimpulkan $\angle BAC = 60^\circ$. Maka $\angle B + \angle C = 120^\circ$ dan diperoleh

$$-\frac{1}{2} = \cos(B + C) = \cos B \cos C - \sin B \sin C.$$

Dari soal, kita punya $\frac{11}{32} = \cos(C - B) = \cos C \cos B + \sin C \sin B$. Jumlahkan dengan persamaan sebelumnya, diperoleh

$$2\cos B \cos C = -\frac{1}{2} + \frac{11}{32} = \frac{-16 + 11}{32} = -\frac{5}{32} \iff \cos B \cos C = -\frac{5}{64}.$$

Dapat kita simpulkan bahwa $\angle B > 90^\circ$ sehingga titik O dan H terletak berlawanan terhadap sisi garis BC. Misalkan $\angle OAC = x$, maka $\angle OCA = x$. Kita punya $\angle AOC = 180^\circ - 2x$ dan diperoleh mayor$\angle AOC = 360^\circ - \angle AOC = 180^\circ + 2x$ sehingga $\angle ABC = \frac{\text{mayor}\angle AOC}{2} = 90^\circ + x$. Maka $\angle EBA = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ - x$ dan diperoleh $\angle EAB = x$. Perhatikan bahwa $AH = 2R|\cos A| = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$ di mana R jari-jari lingkaran luar segitiga ABC. Sehingga diperoleh $\angle AOH = \angle AHO = \frac{180^\circ - \angle OAH}{2} = 60^\circ - x$. Kita punya juga $\angle ACB = 30^\circ - x$ sehingga

$$\frac{11}{32} = \cos\left(30^\circ - x - 90^\circ - x\right) = \cos\left(-60^\circ - 2x\right) = \cos\left(60^\circ + 2x\right) = 1 - 2\sin^2\left(30^\circ + x\right)$$

mengingat $\cos(t) = \cos(-t)$ dan $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$. Maka $\sin\left(30^\circ + x\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{11}{32}\right)} = \frac{\sqrt{21}}{8}$. Tinjau bahwa

$$\angle ODN = \angle EDH = 90^\circ - \angle EHD = 90^\circ - (60^\circ - x) = 30^\circ + x.$$

Tinjau panjang $MC = MB = OC = OB$ sehignga $BMCO$ belah ketupat, maka panjang $ON = NM = \frac{1}{2}$. Dari segitiga DNO, diperoleh

$$DO = \frac{ON}{\sin \angle ODN} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin\left(30^\circ + x\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{8}} = \frac{4}{21}\sqrt{21}.$$

Maka $a = 4, b = 21$, dan $c = 21$ sehingga $a + b + c = \boxed{46}$.